13/3/17

Μαθημα 5

$K \subseteq \mathbb{C}$

Συμπαγες: $\forall z_\nu \in K \; (\exists z_{k_\nu})$ κ' $z_0 \in K$: $z_{k_\nu} \to z_0$

$\Updownarrow$

Κλειστο και φραγμενο

Ν.δ.ο. $z_1 \in K$ κ' $z_\nu \to z_0 \Rightarrow z_0 \in K$

$$\left.\begin{matrix} z_1 \in K \text{ κ' } z_\nu \to z_0 \Rightarrow z_0 \in K \\ (z_\nu) \Rightarrow \exists z_{k_\nu} \text{ κ' } z_1 \in K : z_{k_\nu} \to z_1 \end{matrix}\right\} \Rightarrow z_0 = z_1 \in K$$

$\exists M > 0 \; : \; |z| \leq M \; \forall z \in K$

$(\forall M > 0) \; (\exists z_M) : |z_M| > M$

$(\forall \nu \in \mathbb{N}) \; (\exists z_\nu \in K) : |z_\nu| > \nu$

$\exists z_{k_\nu} \in K$ κ' $z_0 \in K$: $z_{k_\nu} \to z_0$

$|z_0| \leftarrow |z_{k_\nu}| > k_\nu \geq \nu \to +\infty$

$z_\nu \in K$

Bolzano $\Rightarrow \exists (z_{k_\nu})$ κ' $z_0 \in \mathbb{C}$ $\quad z_{k_\nu} \to z_0 \Rightarrow z_0 \in K$

Cantor

$K_{\nu+1} \subseteq K_\nu$, K_ν συμπαγες.

$diam(K_\nu) \to 0 \Rightarrow \exists! \, z_0 \in \mathbb{C} : \cap K_\nu = \{z_0\}$

$-\infty \quad 0 \quad +\infty$

$\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\} = \mathbb{R}^*$

$\forall x \in \mathbb{R} : -\infty < x < +\infty$

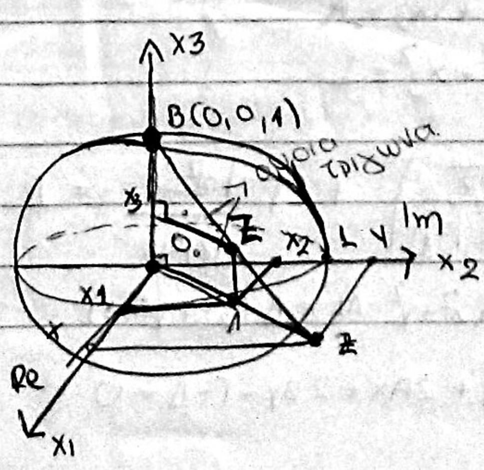
$(\pm\infty) + x = \pm\infty$

$\cancel{(\pm\infty) - (\pm\infty)}$

$(\pm\infty) + (\pm\infty) = (\pm\infty)$

$$(\pm\infty)\, x = \begin{cases} \pm\infty & x > 0 \\ \mp\infty & x < 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

Σφαιρα του Riemann



$Z = x + iy$

$S : x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$

$$\Pi: S \setminus \{B\} \xrightarrow{1-1} \mathbb{C} \quad \Pi(B)=\infty$$

$\mathbb{C} \cup \{\infty\} = \tilde{\mathbb{C}} \to$ επεκτεταμενο μιγαδικο επιπεδο.

λογοι (απο τα ομοια τριγωνα)

$$\frac{1-x_3}{1} = \frac{[x_3 z]}{[OZ]} = \frac{[OП]}{[OZ]} = \frac{x_1}{x} = \frac{x_2}{y}$$

Επω δηλαδη: $x(1-x_3) = x_1 \Rightarrow x = \frac{x_1}{1-x_3} =$

$y(1-x_3) = x_2 \quad y = \frac{x_2}{1-x_3}$

$$x^2(1-x_3)^2 = x_1^2$$
$$y^2(1-x_3)^2 = x_1^2$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$|z|^2(1-x_3)^2 = x_1^2 + x_2^2 = 1 - x_3^2$$
$$|z|^2 - 1 = x_3(1+|z|^2)$$
$$x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

$$x_1 = x(1-x_3) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})(1-x_3) = \frac{1}{2}(z+\bar{z})\frac{2}{|z|^2+1} = \frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}$$

$$x_2 = y(1-x_3) = \frac{1}{2i}(z-\bar{z})(1-x_3) = \frac{1}{\cancel{2}i}\frac{\cancel{2}(z-\bar{z})}{|z|^2+1} = \frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}$$

$$x_3 = \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1}$$

προταση 2.6.1

$$Ax_1 + Bx_2 + \Gamma x_3 = \Delta$$
$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1$$

$$A\left(\frac{z+\bar{z}}{|z|^2+1}\right) + B\left(\frac{z-\bar{z}}{i(|z|^2+1)}\right) + \Gamma\frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} = \Delta$$

$$2Ax + 2By + \Gamma(x^2+y^2-1) = \Delta(x^2+y^2+1)$$

$$(\Gamma-\Delta)(x^2+y^2) + 2Ax + 2By - \Gamma - \Delta = 0$$

$\Gamma = \Delta$ έχω $2Ax + 2By - \Gamma - \Delta = 0$ το επίπεδο διέρχεται από το $(0,0,1)$

...ιο πόλο.

...νω αν $\Gamma \neq \Delta$

Χορδική απόσταση: $x(z,w) = |z - w|$

Η μέγιστη τιμή που μπορεί να πάρει η χορδική απόσταση είναι η διάμετρος

Η χορδική απόσταση του ∞: $x(\infty, z) =$

$z = (x_1, x_2, x_3)$
$w = (y_1, y_2, y_3)$

$$x^2(z,w) = |z-w|^2 = (x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2 + (x_3-y_3)^2$$
$$= x_1^2 - 2x_1y_1 + y_1^2 + x_2^2 - 2x_2y_2 + y_2^2 + x_3^2 - 2x_3y_3 + x_3^2$$
$$= 2(1 - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3))$$

$$x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3 = \frac{z+\bar z}{|z|^2+1} \cdot \frac{w+\bar w}{|w|^2+1} + \frac{z-\bar z}{i(|z|^2+1)} \cdot \frac{w-\bar w}{i(|w|^2+1)} + \frac{|z|^2-1}{|z|^2+1} \cdot \frac{|w|^2-1}{|w|^2+1}$$

$$\overset{(**)}{=} \frac{(z+\bar z)(w+\bar w) - (z-\bar z)(w-\bar w) + (|z|^2-1)(|w|^2-1)}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)} = \frac{(|z|^2+1)(|w|^2+1) - 2|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}$$

$(*)$

$$(z+\bar z)(w+\bar w) - (z-\bar z)(w-\bar w) + (|z|^2-1)(|w|^2-1) =$$
$$= zw + \bar z w + z\bar w + \bar z \bar w - zw + z\bar w + \bar z w - \bar z \bar w + z\bar z w \bar w - z\bar z - w\bar w + 1 =$$
$$= 2z\bar w + z\bar z w + z\bar z w\bar w - z\bar z - w\bar w + 1$$
$$= \underbrace{z\bar z w\bar w + z\bar z + w\bar w}_{} + 2z\bar w + 2\bar z - w - 2z\bar z - 2w\bar w + 1$$
$$= z\bar z(w\bar w + 1) + (w\bar w + 1) + 2z(\bar w - \bar z) + 2w(\bar z - \bar w)$$
$$= |z|^2(|w|^2+1) + (|w|^2+1) - 2z(\bar z - \bar w) + 2w(\bar z - \bar w)$$

$$= (|w|^2+1)(|z|^2+1) - 2(\bar z - \bar w)(z - w) \overset{(*)}{=} (|z|^2+1)(|w|^2+1) - 2|z-w|^2$$

$$(**) = 1 - \frac{2|z-w|^2}{(|z|^2+1)(|w|^2+1)}$$

$$\chi(z,\omega)^2 = 2\left[\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{2|z-\omega|^2}{(|z|^2+1)(|\omega|^2+1)}\right]$$

$$= \frac{4|z-\omega|^2}{(|z|^2+1)(|\omega|^2+1)}$$

$$\chi(z,\omega) = \frac{2|z-\omega|}{\sqrt{(|z|^2+1)(|\omega|^2+1)}}$$

$$\chi(\infty, z) = \frac{2}{\sqrt{(1+|z|^2}}$$

Πρόταση 2.7.1 $\quad \tilde{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$

$z_\nu \in \tilde{\mathbb{C}}$

1) $\exists z_{k_\nu} : z_{k_\nu} = \infty \Rightarrow z_{k_\nu} \to \infty$

2) $\exists \nu_0 : z_\nu \neq \infty \ \forall \nu \geq \nu_0$

$(z_\nu)_{\nu \geq \nu_0}$ α) φραγμ. $\Rightarrow (\exists z_{k_\nu})$ κ' $z_0 \in \mathbb{C} : z_{k_\nu} \to z_0$

β) όχι φραγμ.

$$\chi(z_{k_\nu}, z_0) = \frac{2|z_{k_\nu} - z_0|}{\sqrt{|z_{k_\nu}|^2+1}\sqrt{|z_0|^2+1}} \longrightarrow \frac{0}{|z_0|^2+1} = 0$$

$\chi(z_{k_\nu}, \infty) = 0$

β) $\forall \nu \ \exists z_{k_\nu} : |z_{k_\nu}| > \nu \Rightarrow \chi(z_{k_\nu}, \infty) = \frac{2}{\sqrt{|z_{k_\nu}|^2+1}} \to 0$

$z_{k_\nu} \to +\infty$

2.7.1 β) $\quad z_\nu \to z_0$

$z_\nu \xrightarrow{\chi} z_0 \Leftrightarrow z_\nu \xrightarrow{|\cdot|} z_0$

$\chi|_{\mathbb{C}} \equiv |\cdot|$

$$\frac{1}{|z|} \leq \frac{2}{\sqrt{|z|^2+1}} \leq \frac{2}{|z|}$$

$$\frac{1}{|z|^2} \le \frac{4}{|z|^2+1} \le \frac{4}{|z|^2}$$

$$|z|^2+1 \le 4|z|^2 \Rightarrow 3|z|^2 \geq 1 \Rightarrow |z| \geq \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$z_\nu \to \infty : (\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow \chi(z_\nu,\infty) < \varepsilon$

$x_\nu \to +\infty$

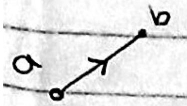
$(\forall \varepsilon>0)(\exists \nu_0)\ \nu \geq \nu_0 \Rightarrow x_\nu > \frac{1}{\varepsilon}$

$\frac{2}{|z_\nu|} < \varepsilon$

$|z_\nu| > \frac{2}{\varepsilon}$

$|z_\nu| > \frac{1}{\varepsilon}$

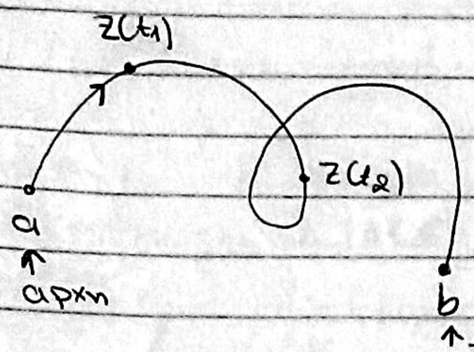
Κεφαλαιο 3!



→ συναρτηση χρονου

$z(t)=(1-t)a+tb \ , \ t\in[0,1]$

$z:[0,1]\to\mathbb{C}$



$z:[a,b]\to\mathbb{C}$

συνεχης

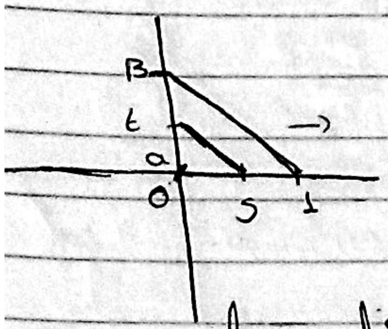
$z(t_1)$ προηγειται του $z(t_2)$

$\tau:[a,b]\to[0,1]$

$\tau(t)\to s$

$\tau(t)=s \Rightarrow t=\tau^{-1}(s)$

παραμετρικη παρασταση → $z^*(s)=z(\tau^{-1}(s)), \ s\in[0,1]$



→ 2 παραλληλες ευθειες ή αλλιως 2 όμοια τρίγωνα.

$$\frac{t-a}{b-a} = \frac{s-0}{1-0} \Rightarrow s=\frac{t-a}{b-a}$$

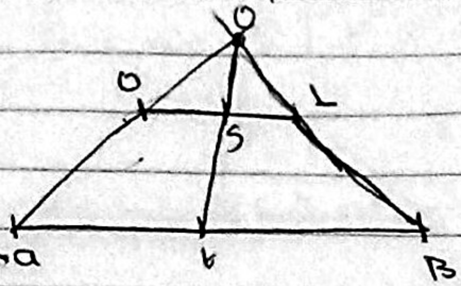
αν $t=a \Rightarrow s=0$

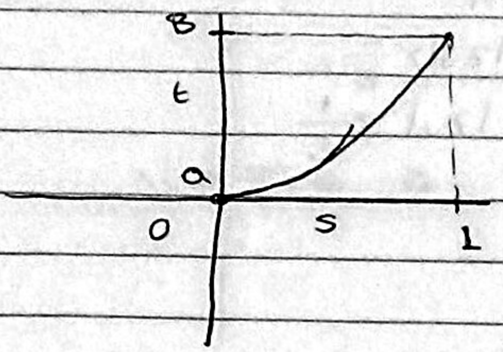
αν $t=\beta \Rightarrow s=1$

$$t=a+(b-a)s$$

→ Αναπαραμετρηση της καμπυλης

Άλλος τρόπος αναπαραμέτρησης





→ Αρχικά ως προς s πάω γρήγορα ενώ ως προς t αργά ενώ στην συνέχεια το αντίθετο

πχ $z(t) = \underbrace{t+2}_{x} + i\underbrace{t^2}_{y}$, $t \in [0,1]$

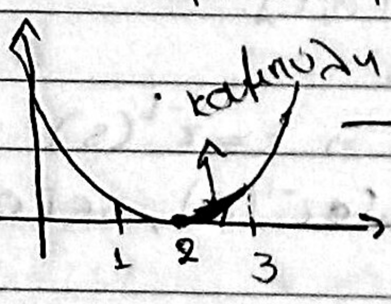
$x = t+2$ $\quad$ $t \in [0,1]$

$y = t^2$ $\quad$ $x \in [2,3]$

$\boxed{y = (x-2)^2}$, $x \in [2,3]$

↓

παραβολή με κορυφή (2,0)



→ Αυτή είναι η εξίσωση